88137229

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Martes 19 de noviembre de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 14]*

Considere las siguientes funciones:

$$f: \ ]1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ donde } f(x) = (x-1)(x+2)$$

$$g: \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ donde } g(x, y) = \left(\operatorname{sen}(x+y),\ x+y\right)$$

$$h: \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ donde } h(x, y) = (x+3y,\ 2x+y)$$

(a) Compruebe que f es biyectiva. *[3]*

(b) Determine, dando razones para sus respuestas, si

(i) g es inyectiva;

(ii) g es sobreyectiva. *[6]*

(c) Halle una expresión para $h^{-1}(x, y)$ y, a partir de lo anterior, justifique por qué h tiene una función inversa. *[5]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Sea G un grupo de orden 12 cuyo elemento neutro es e.

Sea $a \in G$, tal que $a^6 \neq e$ y $a^4 \neq e$.

(i) Demuestre que G es cíclico e indique dos de sus generadores.

(ii) Sea H el subgrupo generado por a^4. Construya una tabla de Cayley para H. *[9]*

(b) Indique, si es necesario o no que un grupo sea cíclico dado que todos sus subgrupos propios son cíclicos, dando una razón para su respuesta. *[2]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Sea A el conjunto de todas las matrices de 3×3 de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales y $a^2 + b^2 \neq 0$.

(i) Compruebe que $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

(ii) A partir de lo anterior, demuestre que $(A, \times)$ es un grupo, donde $\times$ denota el producto de matrices. (Se puede dar por supuesto que el producto de matrices es asociativo.) *[10]*

(b) Sea B el conjunto de todas las matrices de 3×3 de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$, donde c y d son números reales y $c^2 + d^2 \neq 0$.

Demuestre que el grupo $(B, \times)$ y el grupo $(A, \times)$ son isomorfos. *[5]*

4. *[Puntuación máxima: 9]*

Sea $(H, *)$ un subgrupo del grupo $(G, *)$.

Considere la relación R definida sobre G de modo que xRy si y solo si $y^{-1} * x \in H$.

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia sobre G. *[6]*

(b) Determine la clase de equivalencia a la que pertenece el elemento neutro. *[3]*

5. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Dado un conjunto U y dos de sus subconjuntos A y B, demuestre que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{, donde } A \setminus B = A \cap B' .$$ *[4]*

(b) Sea $S = \{A, B, C, D\}$, donde $A = \varnothing$, $B = \{0\}$, $C = \{0, 1\}$ y $D = \{0, 1, 2\}$.

Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso, dando razones para sus respuestas.

(i) La operación $\setminus$ es cerrada en S.

(ii) La operación $\cap$ tiene un elemento neutro en S, pero no todos los elementos tienen un simétrico.

(iii) Dado $Y \in S$, la ecuación $X \cup Y = Y$ siempre tiene una solución única para X en S. *[7]*